Wątpliwości dotyczące modelowania matematycznego filtracji pospiesznej wody

Doubts about mathematical modelling of rapid water filtration

WOJCIECH DĄBROWSKI

DOI 10.36119/15.2023.12.8

Opisano metody matematycznego modelowania filtracji pospiesznej wody zwracając szczególną uwagę na rozbieżności w poglądach dotyczących zjawisk towarzyszących filtracji wgłębnej zawiesin wodnych. Opisano te wątpliwości, które zostały wyjaśnione i w jaki sposób je rozstrzygnięto. Chociaż żadna z metod nie okazała się efektywna w modelowaniu filtracji zawiesiny poddanej koagulacji, a więc nie znalazła bezpośredniego zastosowania w technologii wody, to jednak każda z nich, w różnym stopniu, pozwoliła lepiej zrozumieć ten proces.
Słowa kluczowe: filtracja wgłębna, filtracja pospieszna, modele fizyczno-chemiczne, modele stochastyczne

Methods of mathematical modelling of rapid water filtration are described, paying particular attention to the divergences in views on the phenomena accompanying the depth filtration of water suspensions. These doubts were described and clarified. It was also described how they were resolved. Although none of the methods proved to be effective in modelling the filtration of coagulated suspensions, and thus did not find direct application to water technology, each of them provided a better understanding of the process to varying degrees.
Keywords: depth filtration, rapid water filtration, physico-chemical models, stochastic models.

Wstęp

Filtrację pospieszną zawiesin wodnych przez ośrodek porowaty, stanowiący złoże filtracyjne stosowane w celu otrzymania czystego filtratu, w inżynierii chemicznej, nazywa się filtracją wgłębną. Tutaj zamiennie będzie stosowany termin filtracja wgłębna i filtracja pospieszna. O ile w filtracji pospiesznej dominują zjawiska mechaniczne, o tyle w powolnej mikrobiologiczne. Niemniej w filtracji wgłębnej zjawiska mikrobiologiczne mają znaczenie, chociażby jak idzie o zmianę w czasie eksploatacji filtrów właściwości fizycznych ziaren filtracyjnych. Z drugiej strony, oddziaływania mechaniczne i fizyczno-chemiczne pomiędzy cząstkami zawieszonej w zawiesinach wodnych fazy stałej, a mikroorganizmami i powierzchnią ziaren złoża nie są bez znaczenia dla przebiegu procesu filtracji powolnej.

Omówione tutaj zostaną wątpliwości dotyczące zjawisk towarzyszących filtracji pospiesznej wraz z lakonicznym określeniem metod badawczych zastosowanych do ich rozpoznania.

Podstawy modelowania fenomenologicznego

Matematyczne modelowanie filtracji wgłębnej zawiesin wodnych opiera się na modelach fenomenologicznych, stochastycznych lub fizyczno-chemicznych. Modele fenomenologiczne nazywa się również czasami modelami makroskopowymi [27]. Powstały one w latach czterdziestych ubiegłego stulecia i opierały się na układzie dwóch równań. Jedno z nich opisywało bilans masy, a drugie szybkość wysycania porów złoża filtracyjnego cząstkami fazy stałej. Po pominięciu w równaniu bilansu masy wyrażenia opisującego hydrodyspersję przyjmowało ono jedną z postaci (1), (2) [20] lub (3) [1], [17], [18].

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon C)}{\partial t} + \upsilon \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial C}{\partial t} + \upsilon \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \upsilon \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \qquad (3)$$

W równaniach tych wprowadzono następujące oznaczenia:

- υ – prędkość (pozorna) filtracji [m/s],
- x – współrzędna głębokości [m],
- t – czas [s],
- C – objętościowe stężenie zawiesiny zdefiniowane jako iloraz objętości zawieszonych w zawiesinie cząstek fazy stałej do objętości zawiesiny [-],
- ε – chwilowa porowatość objętościowa złoża zależna od porowatości początkowej ε_o oraz od stężenia osadu σ [-],
- σ – stężenie objętościowe osadu zdefiniowane jako iloraz objętościowy zatrzymanych cząstek fazy stałej do objętości porowatego ośrodka [-].

W równaniu (1) uwzględniono wyrażenie $\partial(\varepsilon C)/\partial t$ opisujące szybkość zmian w czasie objętości zajętej w zawiesinie, wypełniającej pory złoża filtracyjnego, przez cząstki fazy stałej. W równaniu (2) uproszczono to wyrażenie przyjmując $\varepsilon = \varepsilon_0$ i wreszcie w równaniu (3) całkowicie je pominięto.

Równanie opisujące wysycanie porowatego ośrodka usuwanymi cząstkami fazy stałej zapisywane było przez Rosjan [25] i Polaków [3], [9], [20], [21], [22] w postaci równania kinetyki (4), a w krajach „zachodnich" w postaci równania (5) zapisanego po raz pierwszy przez Iwasaki [18].

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \alpha \lambda(\sigma) C \qquad (4)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = -\alpha \lambda(\sigma) C \qquad (5)$$

W równaniach (4), (5) α jest funkcją zależną od prędkości filtracji i od nierównomierności uziarnienia α (υ,x), przy czym wartości α w tych równaniach są różne. Zmiennymi niezależnymi w równaniach (1) lub (2) lub (3) oraz (4) lub (5) są: x, t. Zmiennymi zależnymi są C(x,t), σ (x,t) oraz ε (σ(x,t)). Ponieważ z układu dwóch

prof. dr hab. inż. Wojciech Dąbrowski https://orcid.org/0000-0003-0896-793X – Politechnika Krakowska, Kraków.
Adres do korespondencji/ Corresponding author: wojciech.dabrowski@pk.edu.pl

równań można obliczyć tylko dwie zmienne zależne, więc w przypadku zastosowania równania bilansu (1) konieczne jest wyrażenie porowatości ε w funkcji stężenia osadu ε. Niestety stosunkowo mało wiadomo o zależności ε = ε (σ) i oblicza się porowatość ośrodka, tak jak gdyby była ona zależna liniowo od porowatość osadu m i od jego stężenia σ, co nie znajduje podstaw technicznych:

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1-\frac{\sigma}{1-m}) \tag{6}$$

Znalezienie całki szczególnej wymaga znajomości warunków granicznych. Pierwszy z nich jest warunkiem brzegowym,

$$C(x=0,t) = C_0 \tag{7}$$

które definiuje stałą wartość stężenia zawiesiny C_0 dopływającej do złoża filtracyjnego, albo zmienną w czasie C(x = 0,t) = $C_{x=0}(t)$, gdzie $C_{x=0}(t)$ jest zadaną funkcją czasu. Oprócz warunku brzegowego (7) w obliczeniach korzysta się z warunku opisującego to, że po wypłukaniu złoża filtracyjnego „czoło" dopływającej zawiesiny natrafia na czysty porowaty ośrodek. Ten warunek dla równań bilansu masy (1), (2) przyjmuje się w postaci warunku granicznego (8), a dla równania (3) jako warunek początkowy (9):

$$\sigma\left(x, t=\frac{x\varepsilon_0}{\upsilon}\right)=0 \tag{8}$$

$$\sigma(x,0) = 0 \tag{9}$$

Dla niejednorodnego porowatego ośrodka, z jakim mamy do czynienia po płukaniu filtru, należy przyjąć, że współczynniki α zależą od współrzędnej głębokości x. Dlatego α = α(x). Tak więc dla układów równań (1), (4) oraz (2), (4) i warunków granicznych (7), (8) oraz dla układu równań (3), (5) i warunków granicznych (7), (9) zmienne zależne C, σ, ε, α wykazują następujące zależności od zmiennych niezależnych x oraz t:

$$C(x, t),\ \sigma(x, t),\ \alpha(x),\ \varepsilon(\varepsilon_0, \sigma(x, t)),$$
$$\lambda(\sigma(x, t)).$$

Wartość stężenia osadu na granicy warstwy filtracyjnej, tzn. dla x=0 obliczyć można bezpośrednio z równania kinetyki (4) oraz warunku brzegowego (7). Metody analitycznego rozwiązania układu równań bilansu masy (1) i kinetyki (4) przy warunkach granicznych (7), (8) oraz układu równań (2), (4) przy tych samych warunkach granicznych są od dawna znane, w tym dla równań kinetyki opisującego przepływ przez niejednorodny porowaty ośrodek [9]. Natomiast układ równań bilansu masy (3) oraz równania opisującego wysycanie porowatego ośrodka osadem (5) rozwiązuje się przy warunku brzegowym (7) oraz początkowym (9). Metoda rozwiązania tego układu równań jest prosta i przedstawiona wiele lat temu.

Modele stochastyczne i UBE

Modele stochastyczne rozwijane były intensywnie w szkole naukowej profesora Litwiniszyna, głównie w oparciu o procesy Markowa. Zasługą tych modeli było dostarczenie podstaw teoretycznych dla przyjętych najpierw intuicyjnie i następnie czysto empirycznie potwierdzonych równań kinetyki (4) oraz takich, które dodatkowo uwzględniały hipotetyczne zjawisko sufozji osadu w filtrach. Modele fizyczno–chemiczne filtracji odnosiły się najpierw do przepływu gazów odlotowych przez filtry workowe, a później zostały zaadoptowane do modelowania filtracji pospiesznej (wgłębnej) wody i tam rozwijane. Podzielono zjawiska występujące w filtracji pospiesznej na mechanizmy transportu i adhezji. W czasie filtracji pospiesznej wody odstępstwa od ruchu laminarmego liniowego są nieznaczne. Jeżeli zastosować równanie Erguna do obliczania oporów przepływu przez czyste złoże filtracyjne to pierwszy jednomian tego równania opisuje laminarne liniowe opory przepływu, tak jak równanie Kozeny–Carmana, a drugie nieliniowość oporów. Wartość tego drugiego jednomianu nie przekracza 2% całkowitych oporów przepływu, nawet dla filtrów superpospiesznych. W przepływie laminarnym linie prądu są ustalone w czasie i nie stykają się z ograniczającymi przepływ ciałami stałymi, na których powierzchni prędkość przepływu jest równa zero. Tak więc zatrzymanie cząstek fazy stałej w złożu filtracyjnym oznacza, że istnieją mechanizmy powodujące opuszczenie przez nie linii prądu i zbliżenie się do powierzchni ziaren złoża filtracyjnego. Te mechanizmy nazywane są mechanizmami transportu. W bardzo małej odległości od ziaren złoża pojawiają się znacznie większe siły. Najpierw rozpoczyna się od odpychania, gdyż zarówno powierzchnia ziaren złoża piaskowego jest naładowana ujemnie jak i cząstek gliny, które stanowią najpowszechniej występującą fazę stałą wód powierzchniowych. Po przekroczeniu utworzonej w ten sposób bariery potencjału zaczynają oddziaływać przyciągające siły powierzchniowe, w tym siła van der Waalsa. Rozróżnia się więc mechanizmy adhezji odpowiedzialne za zatrzymanie na powierzchni ziaren tych cząstek fazy stałej, które przekroczyły barierę potencjału. Modele fizyczno – chemiczne, nazywane „Unit bed element" (UBE) pozwoliły na zrozumienie i opisanie mechanizmów transportu, w tym na określenie zakresu wielkości cząstek zawieszonych w zawiesinie, dla których transport z zawiesiny wodnej do ziaren złoża jest najmniej efektywny. Modele fenomenologiczne nie dawały tej możliwości. Są one jednak przydatne o tyle, że zarówno modele stochastyczne jak i UBE prowadzą do zacytowanych tutaj równań od (1) do (5), a więc można skorzystać z rozwiązań analitycznych odpowiedniego układu równań. Jest to zawsze udogodnienie, nawet pomimo faktu, że rozwiązania numeryczne tych układów są proste.

Przyznać należy, że żadne metody obliczeniowe nie znalazły zastosowania do modelowania przepływu koagulowanych zawiesin wodnych przez niejednorodne po płukaniu złoże filtracyjne. W dalszej części artykułu opisano niektóre zjawiska stwarzające trudności w takim opisie i powodujące, że staje się on, jeżeli w ogóle możliwy, to nieuzasadniony pod względem nakładu pracy na pomiary związane z uwzględnieniem niejednorodności uziarnienia złoża i zawiesiny.

Uproszczenia równania bilansu masy

Jedną z najstarszych kontrowersji dotyczących filtracji pospiesznej wody była sprawa bilansu masy. W krajach zachodnich zawsze stosowane było równanie bilansu (3) podane po raz pierwszy przez T.Iwasaki [18]. Jak zauważył J.Litwiniszyn [20] prawidłowe teoretycznie jest równanie (1), które zawiera dodatkowo wyrażenie opisujące szybkość zmiany stężenia cząstek fazy stałej w zawiesinie wypełniającej pory złoża filtracyjnego. Powstały poważne różnice zdań pomiędzy J.Litwiniszynem, a K.J.Ivesem i pozostałymi naukowcami stosującymi w swoich badaniach równanie Iwasaki (3). Uważali oni, że wyniki stosunkowo licznych prac laboratoryjnych prowadzonych z jednorodną zawiesiną bez koagulacji na jednorodnych złożach filtracyjnych były zgodne z wynikami obliczeń opartych na niepełnym równaniu Iwasaki (3). Rzecz dotyczyła nie tylko tego czy równanie (3) może być stosowane do modelowania filtracji wgłębnej zawiesin wodnych, ale również tego czy badania oparte na równaniu kinetyki (4) są równoważne z tymi, w których stosowano równanie (5). Bowiem z równań (3), (4) otrzymuje się (5) po przeliczeniu nowej wartości α. W rezultacie o ile zastosować warunek początkowy (9), zamiast warunku granicznego (8) to po przeliczeniu odpowiednio w równaniu kinetyki (4) wartości α, wyniki obliczeń opartych na równaniu (4) są identyczne jak oparte na równaniu (5), a więc nie ma różnicy w sposobie modelowania filtracji pospiesznej wody pomiędzy badaczami z Europy Wschodniej i państw zachodnich.

Metoda badawcza i rezultaty

W publikacji [8] dla oceny możliwości zastąpienia równania (1) równaniem (3) zastosowano równania znane pod nazwą autorów publikacji [15] jako równania Herzig-Leclerc-Le Goff. Dla równania (1) sprowadzają się one do postaci (11), a dla równania (3) do postaci (10), o ile założyć przebieg wysycania się ośrodka porowatego zgodny z równaniem kinetyki (4).

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\lambda \cdot \sigma \tag{10}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\lambda(\sigma + \varepsilon \cdot C) \tag{11}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\lambda \cdot (\sigma + \varepsilon_o C_o) \tag{12}$$

Ponieważ wartość stężenia osadu σ(x=0, t) oblicza się bezpośrednio z równania kinetyki (4) i z warunku brzegowego (7) więc obliczone wartości σ(x=0, t) nie zależą od stosowanego w obliczeniach równania bilansu masy. Tak więc warunek brzegowy w postaci σ(x=0, t) jest dla równań (10), (11), (12) taki sam. Stosując twierdzenie Czapłygin-Perron wykazano w pracy [8], że rozwiązanie równania (11) w postaci σ(x,t) jest zawarte pomiędzy rozwiązaniem równań (10) i (12). Przedstawione przykłady obliczeniowe [8] pokazały oczywistą własność, że gdy $C(x,t) << \sigma(x,t)$ zastosowanie niepełnego równania bilansu masy Iwasaki (3) nie ma istotnego wpływu na obliczone wartości stężenia osadu σ(x,t), a więc uproszczenie takie pod koniec procesu filtracji jest jak najbardziej dopuszczalne. Podobny wniosek uzyskano dla radialnej filtracji zawiesin wodnych [7], która występuje w studniach chłonnych.

Hydrodyspersja

Kolejnym konceptem J.Litwiniszyna [20] i jego zespołu, dotyczącym rozszerzenia równania bilansu masy, było uwzględnienie w nim wyrażenia opisującego hydrodyspersję cząstek stałych zawartych w zawiesinie. Chociaż przy pulsacyjnym dopływie zawiesiny można było w przezroczystej kolumnie filtracyjnej obserwować hydrodyspersję, to jednak wszyscy z czasem przyjęli, iż w czasie filtracji pospiesznej wody gradient stężenia zawiesiny w kierunku przepływu jest zbyt mały aby konieczne było rozbudowanie równania bilansu masy o człon hydrodyspersyjny. Wątpliwość ta nie była badana, a jedynie na podstawie zgodności wyników eksperymentalnych z obliczeniami prowadzonymi z uwzględnieniem równania bilansu masy (1), lub (2), lub (3) uznano, że hydrodyspersję można pominąć w matematycznym modelowaniu filtracji wgłębnej zawiesin wodnych.

Sufozja osadu

Dyskusja na temat tego czy w czasie filtracji pospiesznej wody dochodzi do sufozji osadu ma bardzo długą historię. Był to temat najbardziej znanej różnicy zdań pomiędzy K.J. Ivesem oraz D.M. Mintsem [25]. Mints utrzymywał, że w miarę gromadzenia się osadu w porach złoża filtracyjnego dochodzi do jego sufozji i że niezbędne jest uwzględnienie tego procesu w matematycznym modelowaniu filtracji wgłębnej zawiesin wodnych. Zaproponował równanie kinetyki opisujące zarówno zatrzymywanie cząstek fazy stałej w porach złoża filtracyjnego, jak i sufozję, a więc przeciwne do osadzania zjawisko porywania z zatrzymanego osadu cząstek fazy stałej do przepływającej zawiesiny wodnej. Postać tego zaproponowanego równania nie miała podstaw teoretycznych. Przepuszczając przez zakolmatowane złoże filtracyjne czystą wodę K.J. Ives wykazał, że nie dochodzi do wymywania osadu w tych warunkach. Niemniej Mints twierdził, iż przepływ zawiesiny wodnej to nie to samo co przepływ wody i z tym stanowiskiem dosyć powszechnie się zgodzono. Koncepcja sufozji, jako zjawiska występującego w filtracji wgłębnej zawiesin wodnych zakładana była również w niektórych pracach zachodnich [26]. W kolejnym artykule opublikowanym w INSTAL-u zostanie przedstawiona koncepcja badań nad sufozją osadu, w której autor współuczestniczył.

Podsumowanie

Modele fenomenologiczne filtracji wgłębnej zawiesin wodnych pozwalają na matematyczny opis przepływu jednorodnej niekoagulowanej zawiesiny przez homogeniczne porowate złoże. Rozwinięto te modele na przypadki niejednorodnego ośrodka porowatego, ale brak jest rzetelnych podstaw doświadczalnych, które potwierdziły poprawność równania kinetyki (4), w którym stałą wartość współczynnika α zastąpiono dla niejednorodnego złoża przez funkcję α (x) [9]. Równania stosowane w fenomenologicznych metodach modelowania zostały poniekąd uzasadnione przez modele stochastyczne [19,20,21], ale przy wyprowadzaniu tych równań konieczne było poczynienie założeń dotyczących prawdopodobieństwa zatrzymania w złożu filtracyjnym zawieszonej w zawiesinie cząstki fazy stałej, a w modelach uwzględniających sufozję osadu również prawdopodobieństwo wymycia takiej cząstki z osadu. Tak więc chociaż uzyskano w efekcie równania opisujące wysycanie się porowatego ośrodka cząstkami zawieszonej fazy stałej, to jednak otrzymany wynik uzależniony był od założeń poczynionych na etapie budowy modeli stochastycznych. Wielką zasługą modeli fizyczno–chemicznych (UBE) było wyjaśnienie istoty mechanizmu transportu odpowiedzialnego za opuszczenie przez cząstkę stałą zawiesiny linii prądu i zbliżenie się do obszaru, na którym najpierw dominują siły odpychające, tworząc barierę potencjału, a później siły adhezyjne. Obliczenia przeprowadzone dla kolektorów różnego kształtu pozwoliły wyznaczyć wielkości cząstek, dla których występuje minimum efektywności mechanizmu transportu. W ten sposób zrozumiano wiele faktów dotyczących skuteczności procesu filtracji, jak przykładowo to dlaczego filtracja jest tak mało skuteczna w usuwaniu oocyst *Criptosporidium*, które powodują najczęstsze infekcje pochodzące od wody do picia.

Niestety wszystkie trzy metody matematycznego modelowania filtracji zawiesin wodnych przez ośrodki porowate nie są efektywne w modelowaniu filtracji zawiesin wodnych po koagulacji [13], [14]. Jednak są zagadnienia procesów filtracji w skali technicznej, w których metody matematycznego modelowania są stosowane. Takim przykładem jest obliczanie parametrów eksploatacyjnych filtrów o skokowo zmiennej wydajność (VDRF od Variable Declining Rate Filters) [2], [4], [5], [10], [23], [24]. Jest to możliwe dzięki temu, że system hydraulicznej regulacji tych filtrów można obliczyć wyłącznie na podstawie podstawowych praw mechaniki płynu [6], [11], [12], bez korzystania z opisanych tutaj metod matematycznego modelowania procesu filtracji pospiesznej. Obliczenia te można jedynie trochę uściślić stosując dodatkowo te metody.

POWOŁANIA

[1] Amirtharajah A., Some theoretical and conceptual views of filtration, J.Am.Water Works Assoc., 1988, 80, 34-36

[2] Arboleda J., Giraldo R., Snel H., Hydraulic behaviour of declining rate filtration, Journal AWWA,1985, Vol.77, No.12, s.67-74
[3] Bodziony J., Kraj W., Equation describing colmatage-and–suffosion phenomenon, Bull. Acad.Polon.Sci.Ser.sci.techn.,1966, XIV (7), 417-426
[4] Chaudhry F.H., Theory of declining rate filtration I: Continuous operation, Journal of the Environmental Engineering, 1987, Vol.113, No.4, 834-851
[5] Chaudhry F.H., Theory of declining rate filtration II:Bank operation. Ibid.1987, Vol.113, No.4, 852-866
[6] Cleasby J.L., Di Bernardo L., Hydraulics considerations in declining rate filtration, ibid., 1980, EE6, 1043-1055
[7] Dąbrowski W., A method of calculating the concentration of deposit around an injection well, Water Res., 1984, Vol.18, 709-717
[8] Dąbrowski W., Consequences of the mass balance simplification in modelling deep filtration, Water Res., 1988, Vol.22, No 10, 1219-1227
[9] Dąbrowski W., Burys S., A multimedia filter in numerical calculation, Acta Hydrochimica et Hydrobiologica,1987, Vol.15, No.5, 511-520
[10] Dąbrowski W., Mackie R.I., Dynamics of Variable Declining Rate Filters during backwash, Arch. Hydro-Eng., Environ. Mechanics, 1997, 41(3-4), 37-51
[11] Dąbrowski W., On computing of VDR rapid filters control system, Instal 2020, 9, 48-51 DOI: 10.36119/15.2020.9.8
[12] Dąbrowski W., Should variable declining rate filters be operated as one large or several separate plants? Desalination and Water Treatment, 2020, 185, 113-116
[13] Deb A.K., Discussion of filtration through size-graded media, J.sanit.Engng Div.,Proc. Am.Soc.civ.Engrs, 1966, 92, SA1, 321-325
[14] Fox D.M., Cleasby J.L., Experimental evaluation of sand filtration theory, J.San. Eng.Div., 1966, SA5, 61-82
[15] Herzig J.P., Leclerc D., Le Goff P., The flow of suspensions through porous media; application to deep filtration, Ind.Eng.Chem., 1970, 62, 8-35
[16] Horner R.M.W., Jarvis R.J., Mackie R.I., Deep-bed filtration – a new look at the basic equations. Water Research, 1986, Vol.20, No.2, 215-220
[17] Ives K.J., Advances in deep-bed filtration, Transt. Inst. Chem. Engrs., 1970, Vol.48, 94-100
[18] Iwasaki T., Some notes on sand filtration, Journal AWWA, 1937, Vol.29, 1591-1602
[19] Kraj W., A probalistic model of the phenomena accompanying the flow of suspension through a porous medium, Pr. Kom. Górn. Geodezy., 1974, 13, 1511-187
[20] Litwiniszyn J., The phenomenon of colmatage, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 1966, 4, 18, 479-496
[21] Litwiniszyn J., Kraj W., Probabilistic model of colmatage and scouring phenomena, Bulletin de L'academie Polonaise des Sciences, 1968, Vol.16, No.9, 443-450
[22] Litwiniszyn J., On a certain Markov model of colmatage-scouring phenomena, I, ibid., 1968, Vol.16, No.11-12, 533-539
[23] Mackie R.I., Zielina M., Dąbrowski W., Numerical study of a rational rule for the operation of Variable Declining Rate filter plant in response to changes in raw water quality, Environment Protection Engineering, 2003, Vol.29, No.1, 45-51
[24] Mackie R.I., Zielina M., Dąbrowski W., 2003, Filtrate quality from different filter operations, Acta Hydrochimica et Hydrobiologica, Vol.31, No.1, 25-35
[25] Mints D.M., Modern theory of filtration. Special Report No.10, International Water Supply congress, Barcelona, 1966
[26] Moran M.C., Morgan D.C., Cushing R.S., Lawler D.F., Particle behaviour in deep bed filtration, part 2-particle detachment, Journal of the American Water Resources Association, 1993, Vol.85, no.12, 82-93
[27] Zielina M., Dąbrowski W., Modele makroskopowe w filtracji pospiesznej, Czasopismo Techniczne, Budownictwo, 2001, 3-B, 202-221
[28] Zielina M., Dąbrowski W., Energy and water savings during backwashing of rapid filter plants, Energies, 2021, Vol.14, 13, 1-23

■